Lógica Computacional

- O sistema $\mathcal{R}$ para a Lógica de Predicados
- Refutações no sistema $\mathcal{R}$
- Composição de Substituições
- Análise da Contradição: Respostas a Questões

Resolução na Lógica de Predicados

- Uma vez definidas as extensões necessárias em relação ao caso proposicional, podemos agora apresentar a extensão do sistema $\mathcal{R}_p$ para a Lógica de Predicados.

Sistema de Resolução $\mathcal{R}$

O Sistema de Resolução $\mathcal{R}$ tem as seguintes características:

1. Demonstrações através de ***Refutações***: Para demonstrar uma fórmula φ a partir de um conjunto de premissas Φ, demonstra-se que o conjunto $\Phi \cup \{\varphi\}$ é insatisfazível. Isto é, que a partir de $\Phi \cup \{\varphi\}$ pode demonstrar-se o absurdo / ***cláusula vazia***.
2. Todas as fórmulas utilizadas são cláusulas, ou seja disjunções obtidas a partir da forma CNF das matrizes de fórmulas ***Prenex Skolemizadas***.
3. A única regra de inferência utilizada é a resolução, requerendo esta que os literais resolvidos sejam ***unificados***.

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1: Se todos os dodecaedros são grandes e estão à frente do objecto **a**, e se existe um objecto que não está à frente de nenhum objecto, então existe um objecto que não é um dodecaedro.

F1	**∀x (Dodec(x) → (Large(x) ∧ FrontOf(x, a)))**
F2	**∃x ∀y ¬FrontOf(x,y)**
	$\mathcal{R}$
F3	**∃x ¬ Dodec(x)**

- Para demonstrar este argumento no sistema $\mathcal{R}$ há que transformar as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal. A fórmula **F1** requer os seguintes passos de transformação, originando as cláusulas **C1** e **C2.**

F1. ∀x (Dodec(x) → (Large(x) ∧ FrontOf(x,a)))

➔ **∀x (¬ Dodec(x) ∨ (Large(x) ∧ FrontOf(x,a)))**

➔ **∀x ((¬ Dodec(x) ∨ Large(x)) ∧ (¬ Dodec(x) ∨ FrontOf(x,a)))**

➔ **∀x1 ((¬ Dodec(x1) ∨ Large(x1)) ∧**
∀x2 (¬ Dodec(x2) ∨ FrontOf(x2,a)))

➔ **C1. ¬ Dodec(x1) ∨ Large(x1)**
C2. ¬ Dodec(x2) ∨ FrontOf(x2,a)

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1 (cont):

$$\begin{array}{l|l} \textbf{F1} & \forall x\ (\text{Dodec}(x) \rightarrow (\text{Large}(x) \wedge \text{FrontOf}(x,\ a))) \\ \textbf{F2} & \exists x\ \forall y\ \neg\text{FrontOf}(x,y) \\ \hline \textbf{F3} & \exists x\ \neg\ \text{Dodec}(x) \end{array}\ \mathcal{R}$$

- A fórmula **F2** apenas requer a skolemização da variável **x**, devendo a constante de Skolem ser diferente da constante **a** já referida na fórmula **F1**.

F2. $\exists x\ \forall y\ \neg\text{FrontOf}(x,y)$

➔ **C3.** $\neg\ \text{FrontOf}(c,x3)$

- Finalmente a negação da conclusão substitui o quantificador existencial e evita a skolemização.

F3. $\neg\ \exists x\ \neg\ \text{Dodec}(x)$

➔ $\forall x\ \neg\ \neg\ \text{Dodec}(x)$

➔ **C4.** $\text{Dodec}(x4)$

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1 (cont):

```
F1 | ∀x (Dodec(x) → (Large(x) ∧ FrontOf(x, a)))
F2 | ∃x ∀y ¬FrontOf(x,y))
   |------------------------------------------ℛ
F3 | ∃x ¬ Dodec(x)
```

- Uma vez obtida a forma clausal, pode passar-se à demonstração por refutação.

```
C1. | ¬ Dodec(x1) ∨ Large(x1)
C2. | ¬ Dodec(x2) ∨ FrontOf(x2,a)
C3. | ¬ FrontOf(c,x3)
C4. | Dodec(x4)
    |------------------------------
C5. | FrontOf(x4,a)    Res 4,2 {x2/x4}
C6. | □                Res 5,3 {x4/c, x3/a}
```

- No final pode concluir-se a existência de um não-dodecaedro (**x4**). De facto, se todos os objectos **x4** fossem dodecaedros, o sistema de cláusulas **C1-C4** seria inconsistente. Especificamente, é possível instanciar **x4** a um dodecaedro para obter a inconsistência, pelo que se conclui que essa instância de **x4** não é um dodecaedro.
- Pelas substituições (**x4/c**), verifica-se que o **não-dodecaedro** é o objecto referido na fórmula **F2**, sem nenhum objecto à sua frente, e que skolemizamos com o nome **c**.

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1 (cont):

```
F1 | ∀x (Dodec(x) → (Large(x) ∧ FrontOf(x, a)))
F2 | ∃x ∀y ¬FrontOf(y,x)
   |---------------------------------------- 𝓡
F3 | ∃x ¬ Dodec(x)
```

- Mas a unificação das cláusulas C2 e C4 pode ser feita com uma variante

```
C1. | ¬ Dodec(x1) ∨ Large(x1)
C2. | ¬ Dodec(x2) ∨ FrontOf(x2,a)
C3. | ¬ FrontOf(c,x3)
C4. | Dodec(x4)
    |------------------------------
C5. | FrontOf(x2,a)     Res 4,2 {x4/x2}
C6. | □                 Res 5,3 {x2/c, x3/a}
```

- Neste caso, a análise da demonstração mostra que a variável **x4** (o não-dodecaedro) foi inicialmente substituida por **x2** e esta subsequentemente substituída por **c**.
- Assim coloca-se a necessidade de definir a operação de **composição** de substituições, de forma a “seguir o rasto” das variáveis que vão sendo substituídas ao longo da derivação da cláusula vazia.

Composição de Substituições

- Informalmente, a composição de duas substituições **σ** e **ρ** garante que um termo a que sejam aplicadas essas substituições em sequência (σ seguida de ρ) fica idêntico ao que ficaria se lhe fosse aplicada directamente a sua composição. Mais formalmente,

Composição de Substituições:

Dadas duas substituições **$\sigma = \{ \nu_1/\tau_1 \ldots , \nu_m/\tau_m \}$** e **$\rho = \{ \omega_1/\theta_1 \ldots , \omega_n/\theta_n \}$** a sua composição, denotada por **$\sigma \circ \rho$**, é obtida substituindo em **σ** todas as ocorrências de qualquer **ω_ι** pelo respectivo par θ_ι, e unindo o conjunto resultante com ρ.

Exemplo: Para $\sigma = \{ \mathtt{x1/a,\ x2/y1,\ x3/f(y2)} \}$ e $\rho = \{ \mathtt{y1/b,\ y2/y3} \}$ temos

$$
\begin{aligned}
\sigma \circ \rho &= \{ \mathtt{x1/a,\ x2/y1,\ x3/f(y2)} \} \circ \{ \mathtt{y1/b,\ y2/y3} \} \\
&= \{ \mathtt{x1/a,\ x2/b,\ x3/f(y3)} \} \cup \{ \mathtt{y1/b,\ y2/y3} \} \\
&= \{ \mathtt{x1/a,\ x2/b,\ x3/f(y3),\ y1/b,\ y2/y3} \}
\end{aligned}
$$

- Aplicando as substituições σ e ρ em sequência ao termo **`T`**: **`P(x1,x2,x3,y1,y2,y3)`**

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{P(x1,x2,x3,y1,y2,y3)}\sigma &= \quad &\mathtt{P(a,y1,f(y2),y1,y2,y3)} \quad \text{e} \\
&\mathtt{P(a,y1,f(y2),y1,y2,y3)}\,\rho &= \quad &\mathtt{P(a,b,f(y3),b,y3,y3)}
\end{aligned}
$$

claramente o resultado de aplicar directamente a substituição **$\sigma \circ \rho$** ao termo **`T`**.

Composição de Substituições

Exemplo 1 (cont):

```
C1. ¬ Dodec(x1) ∨ Large(x1)
C2. ¬ Dodec(x2) ∨ FrontOf(x2,a)
C3. ¬ FrontOf(c,x3)
C4. Dodec(x4)
```

- Regressando ao exemplo inicial verifica-se que em ambos os casos, a composição das duas substituições feitas conduz ao mesmo resultado – o objecto **c** não pode ser um dodecaedro, contrariamente ao admitido na negação da conclusão. No primeiro caso,

```
C5. FrontOf(x4,a)    Res 4,2 {x2/x4}
C6. □                Res 5,3 {x4/c, x3/a}
```

por composição das substituições obtém-se

$$\{x2/x4\} \circ \{x4/c,\ x3/a\} = \{x2/c\} \cup \{x4/c,\ x3/a\} = \{x2/c,\ x3/a,\ x4/c\}$$

- No segundo caso,

```
C5. FrontOf(x2,a)    Res 4,2 {x4/x2}
C6. □                Res 5,3 {x2/c, x3/a}
```

obtemos

$$\{x4/x2\} \circ \{x2/c,\ x3/a\} = \{x4/c\} \cup \{x2/c,\ x3/a\} = \{x2/c,\ x3/a,\ x4/c\}$$

Factorização de Cláusulas

- Antes de apresentar outros exemplos existe ainda uma situação que precisa de ser analisada.
- Até agora as substituições eram usadas para permitir unificar literais complementares de **duas** cláusulas que seriam resolvidas após aplicação de um unificador mais geral.
- O próximo exemplo mostra que (raramente) pode ser necessário aplicar resolução **numa só** cláusula.
- Mais especificamente, isto pode ser necessário para **factorizar** ocorrências distintas, mas unificáveis, de um literal na mesma cláusula.

Exemplo 2: Paradoxo do Barbeiro

Este problema pode ser ilustrado com o “Paradoxo do Barbeiro”:

Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

em que se pretende provar, por contradição, que não existe tal barbeiro, isto é pretende demonstrar-se que se pode obter a contradição a partir da (negação da) fórmula

$$\{\} \models \neg\exists x\ (B(x) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$$

Factorização de Cláusulas

Exemplo 2 (cont): Passando a fórmula para a forma clausal obtemos as cláusulas

```
F1. ∃x ∀y (B(x) ∧ (¬B(y,y) ↔ B(x,y)))
 ➔ ∃x ∀y (B(x) ∧ (B(y,y)∨ B(x,y)) ∧ (¬B(y,y) ∨ ¬B(x,y))
 ➔ ∀y (B(b) ∧ (B(y,y)∨ B(b,y)) ∧ (¬B(y,y) ∨ ¬B(b,y))
 ➔ B(b) ∧ ∀y (B(y,y)∨ B(b,y)) ∧ ∀y (¬B(y,y) ∨ ¬B(b,y))
 ➔ C1. B(b)
   C2. B(y1,y1) ∨ B(b,y1)
   C3. ¬B(y2,y2) ∨ ¬B(b,y2))
```

- Mas agora somos confrontados com um problema. Para resolver as cláusulas C2 e C3. eliminamos um literal positivo de C1 e um negativo de C2 e obtemos uma cláusula com um literal positivo e outro negativo, que sendo uma tautologia não nos pode conduzir à cláusula vazia. O exemplo abaixo mostra as 4 possíveis resolventes de C2 e C3

```
C2.  B(y1,y1)  ∨ B(b,y1)
C3.  ¬B(y2,y2) ∨ ¬B(b,y2)
C4a. B(b,y2)   ∨ ¬B(b,y2)     Res 2(1), 3(1) {y1/y2}
C4b. B(b,b)    ∨ ¬B(b,b)      Res 2(1), 3(2) {y1/b, y2/b}
C4c. B(b,b)    ∨ ¬B(b,b)      Res 2(2), 3(1) {y1/b, y2/b}
C4d. B(b,y2)   ∨ ¬B(b,y2)     Res 2(2), 3(2) {y1/y2}
```

Factorização de Cláusulas

Exemplo 2 (cont):

- Para ultrapassar este problema deveremos **factorizar** os literais das cláusulas, isto é aplicar-lhes um unificador mais geral e usar idempotência para eliminar um dos literais repetidos.

- O Paradoxo do Barbeiro pode ser resolvidos como ilustrado de seguida, já que negando a conclusão se obtém a cláusula vazia obtida trivialmente, uma vez factorizadas as cláusulas C2 e c3.

$$\{\} \mid\!-_{\mathcal{R}} \neg\exists x\ \forall y\ (B(x) \land (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$$

C1.	B(b)	
C2.	B(y1,y1) ∨ B(b,y1)	
C3.	¬B(y2,y2) ∨ ¬B(b,y2))	
C4.	B(b,b)	Fact 2 {y1/b}
C5.	¬B(b,b)	Fact 3 {y2/b}
C6.	□	Res 4, 5

- Uma vez abordadas as componentes do sistema $\mathcal{R}$, podemos ilustrar o seu funcionamento num conjunto de demonstrações já utilizadas para o sistema $\mathcal{DN}$.

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 3: { ∃x ∀y NearOf(x,y) } $|-_{\mathcal{R}}$ ∀y ∃x NearOf(x,y)

- Existindo um objecto “perto” de todos os objectos, então todos os objectos têm algum objecto perto deles.

```
F1. ∃x ∀y NearOf(x,y)
 ➔ C1. NearOf (a,y1)

F2. ¬∀y ∃x NearOf (x,y)
 ➔ ∃y ∀x ¬ NearOf (x2,y2)
 ➔ C2. ¬ NearOf (x2,b)
```

- A demonstração exige um único passo de resolução:

```
C1. | NearOf (a,y1)
C2. | ¬ NearOf (x2,b)
    |____________________
C3. | □                    Res 1, 2 {y1/b, x2/a}
```

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 4: $\{\forall y\ \exists x\ NearOf(x,y)\} \vdash_{\mathcal{R}} \exists x\ \forall y\ NearOf(x,y)$

- Já a inversa não é verdadeira. Se todos os objectos estão perto de algum objecto, não existe necessariamente um objecto "perto" de todos os objectos.

```
F1. ∀y ∃x NearOf(x,y)
 ➔ C1. NearOf(f(y1), y1)

F2. ¬ ∃x ∀y NearOf (x,y)
 ➔ ∀x ∃y ¬ NearOf (x,y)
 ➔ C2. ¬NearOf(x2, g(x2))
```

- Mas agora com a Skolemização das fórmulas, a pseudo-demonstração exigiria que uma variável fosse substituída por um termo contendo essa variável, o que não é permitido numa substituição!

```
C1.  |  NearOf(f(y1),y1)
C2.  | ¬NearOf(x2,g(x2))
     |--------------------
C3a. | □   { x2 / f(g(x2))} ???
C3b. | □   { y1 / g(f(y1))} ???
```

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 5:

Sabendo que os dodecaedros estão todos à esquerda do objecto **a** e que os tetraedros estão todos à direira de **a**, então todos os objectos na mesma coluna que **a** são cubos.

- Como vimos anteriormente, a conclusão **C** apenas se torna uma consequência lógica das premissas, se elas incluirem não só as fórmulas **F1** e **F2**, como alguns axiomas de Tarski, nomeadamente **A1, A2** e **A3**.

```
F1. | ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x, a))
F2. | ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
A1. | ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
A2. | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
A3. | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
    |------------------------------------------ R
C   | ∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))
```

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 5 (cont):

- Para demonstrar a conclusão, há que passar para a forma clausal quer as premissas quer a negação da conclusão.

```
F1. ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x,a))
 ➔ C1. ¬ Dodec(x1) ∨ LeftOf(x1, a)
F2. ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
 ➔ C2. ¬ Tet(x2) ∨ RightOf(x2, a)
A1. ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
 ➔ C3. Tet(x3) ∨ Cube(x3) ∨ Dodec(x3)
A2. ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
 ➔ C4. ¬ SameCol(x4,y4) ∨ ¬ LeftOf(x4,y4)
A3. ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
 ➔ C5. ¬ SameCol(x5,y5) ∨ ¬ Right(x5,y5)
¬C. ¬∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))
 ➔      ∃x ¬ (¬SameCol(x, a) ∨ Cube(x))
 ➔      ∃x (SameCol(x, a) ∧ ¬ Cube(x))
 ➔      SameCol(c, a) ∧ ¬ Cube(c)
 ➔ C6. SameCol(c, a)
   C7. ¬ Cube(c)
```

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 5 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia, por exemplo com a seguinte resolução linear.

C1.	¬Dodec(x1) ∨ LeftOf(x1, a)	
C2.	¬Tet(x2) ∨ RightOf(x2, a)	
C3.	Tet(x3) ∨ Cube(x3) ∨ Dodec(x3)	
C4.	¬SameCol(x4,y4)) ∨ ¬LeftOf(x4,y4)	
C5.	¬SameCol(x5,y5) ∨ ¬RightOf(x5,y5)	
C6.	SameCol(c, a)	
C7.	¬ Cube(c)	
C8.	Tet(c) ∨ Dodec(c)	Res 7,3 {x3/c}
C9.	RightOf(c,a) ∨ Dodec(c)	Res 8,2 {x2/c}
C10.	¬SameCol(c,a) ∨ Dodec(c)	Res 9,5 {x5/c, y5/a}
C11.	Dodec(c)	Res 10,6 { }
C12.	LeftOf(c, a)	Res 11,1 {x1/c}
C13.	¬SameCol(c, a)	Res 12,4 { }
C14.	□	Res 13,6 { }

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 6:

Sabendo que:

a) Qualquer objecto ao lado de um cubo é mais pequeno (que o cubo);
b) Qualquer dodecaedro tem um cubo junto a si; e
c) A relação "junto de" é simétrica (axioma de Tarski);

então pode concluir-se que para qualquer dodecaedro existe um objecto maior do que ele (o dodecaedro).

$$\begin{array}{l|l}
\textbf{F1.} & \forall x\ (\mathbf{Cube}(x) \rightarrow \forall y\ (\mathbf{Adjoins}(y,x) \rightarrow \mathbf{Larger}(x,y))) \\
\textbf{F2.} & \forall x\ (\mathbf{Dodec}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathbf{Cube}(y) \wedge \mathbf{Adjoins}(y,x))) \\
\textbf{A1.} & \forall x\ \forall y\ (\mathbf{Adjoins}(x,y) \rightarrow \mathbf{Adjoins}(y,x)) \\
\hline
\textbf{C.} & \forall y\ (\mathbf{Dodec}(x) \rightarrow \exists y\ \mathbf{Larger}(y,x))
\end{array}\ \mathcal{R}$$

Como anteriormente passemos as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal.

Nota: Por contradição deveremos encontrar um dodecaedro que não tem nenhum objecto maior que ele!

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 6 (cont):

F1. ∀x (Cube(x) → ∀y (Adjoins(x,y) → Larger(x,y)))
➔ ∀x (¬ Cube(x) ∨ ∀y (¬ Adjoins(x,y) ∨ Larger(x,y)))
➔ ∀x ∀y (¬ Cube(x) ∨ ¬Adjoins(x,y) ∨ Larger(x,y)))
➔ **C1. ¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,y1) ∨ Larger(x1,y1)**

F2. ∀x (Dodec(x) → ∃y (Cube(y) ∧ Adjoins(x,y)))
➔ ∀x∃y (¬Dodec(x) ∨ (Cube(y) ∧ Adjoins(x,y)))
➔ **C2. ¬Dodec(x2) ∨ Cube(c(x2))**
➔ **C3. ¬Dodec(x3) ∨ Adjoins(x3,c(x3))**

A1. ∀x ∀y (Adjoins (x,y) → Adjoins(y,x))
➔ **C4. ¬Adjoins(x4,y4) ∨ Adjoins(y4,x4)**

¬C. ¬∀x (Dodec(x) → ∃y Larger(y,x))
➔ ¬∀x∃y (¬Dodec(x) ∨ Larger(y,x))
➔ ∃x∀y (Dodec(x) ∧ ¬Larger(y,x))
➔ ∀y (Dodec(a) ∧ ¬Larger(y,a))
➔ **C5. Dodec(a)**
➔ **C6. ¬Larger(y6,a)** % Nota: O **dodec a** não tem nenhum objecto maior que ele?

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 6 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia.

C1.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,y1) ∨ Larger(x1,y1)	
C2.	¬Dodec(x2) ∨ Cube(c(x2))	
C3.	¬Dodec(x3) ∨ Adjoins(x3,c(x3))	
C4.	¬Adjoins(x4,y4) ∨ Adjoins(y4,x4)	
C5.	Dodec(a)	
C6.	¬Larger(y6,a)	
C7.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,a)	Res 6, 1 {y6/x1, y1/a}
C8.	¬Dodec(x2) ∨ ¬Adjoins(c(x2),a)	Res 7, 2 {x1/c(x2)}
C9.	¬Adjoins(c(a),a)	Res 8, 5 {x2/a}
C10.	¬Adjoins(a,c(a))	Res 9, 4 {x4/a, y4/c(a)}
C11.	¬Dodec(a)	Res 10,3 {x3/a}
C12.	□	Res 11,6 { }

- **Nota**: **O objecto y6** = x1 = c(x2) = **c(a)**, isto é o cubo que está junto ao **dodecaedro a**, é o objecto que **é maior que a** (o não ser maior conduziu à contradição).

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 7:

Sabendo que:

a) Todo o cubo que tem um objecto ao seu lado é pequeno;
b) Existem um dodecaedro e um cubo ao lado um do outro;
c) A relação "junto de" é simétrica (axioma de Tarski);

então pode concluir-se que existe um objecto pequeno.

$$
\begin{array}{l|l}
\mathbf{F1.} & \forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \wedge \exists y\ \mathrm{Adjoins}(y,x)) \rightarrow \mathrm{Small}(x)) \\
\mathbf{F2.} & \exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \wedge \exists y\ (\mathrm{Cube}(y) \wedge \mathrm{Adjoins}(x,y))) \\
\mathbf{A1.} & \forall x\ \forall y\ (\mathrm{Adjoins}(x,y) \rightarrow \mathrm{Adjoins}(y,x)) \\
\hline
\mathbf{C.} & \exists x\ \mathrm{Small}(x)
\end{array}
\quad \mathcal{R}
$$

Como anteriormente passemos as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal.

Nota: Por contradição deveremos encontrar um objecto que não é pequeno. Qual?.

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 7 (cont):

F1. ∀x ((Cube(x) ∧ ∃y Adjoins(y,x))→ Small(x))

➔ ∀x (¬(Cube(x) ∧ ∃y Adjoins(y,x)) ∨ Small(x))

➔ ∀x (¬Cube(x) ∨ ¬ ∃y Adjoins(y,x)) ∨ Small(x))

➔ ∀x (¬Cube(x) ∨ ∀y ¬Adjoins(y,x)) ∨ Small(x))

➔ ∀x ∀y (¬Cube(x) ∨ ¬Adjoins(y,x) ∨ Small(x))

➔ C1. ¬Cube(x) ∨ ¬Adjoins(y,x) ∨ Small(x)

F2. ∃x (Dodec(x) ∧ ∃y (Cube(y) ∧ Adjoins(x,y)))

➔ ∃x∃y (Dodec(x) ∧ (Cube(y) ∧ Adjoins(x,y)))

➔ C2. Dodec(d)

➔ C3. Cube(c)

➔ C4. Adjoins(d,c)

A1. ∀x ∀y (Adjoins (x,y) → Adjoins(y,x))

➔ C5. ¬Adjoins(x5,y5) ∨ Adjoins(y5,x5)

¬C. ¬ ∃x Small(x)

➔ ∀x ¬Small(x)

➔ C6. ¬Small(x6)

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 7 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia.

C1.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(y1,x1) ∨ Small(x1)	
C2.	Dodec(d)	
C3.	Cube(c)	
C4.	Adjoins(c,d)	
C5.	¬Adjoins(x5,y5) ∨ Adjoins(y5,x5)	
C6.	¬Small(x6)	
C7.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(y1,x1)	Res 6, 1 {x6/x1}
C8.	¬Adjoins(y1,c)	Res 7, 3 {x1/c}
C9.	¬Adjoins(c,y1)	Res 8, 5 {x5/c, y5/y1}
C10.	□	Res 9, 5 {y1/d}

- **Nota**: Similarmente ao caso anterior, **x6** = x1 = **c**, isto é, o cubo que está junto ao **dodecaedro d**, é o objecto que **é pequeno** (o facto de não o ser, conduziu à cláusula vazia / contradição).