

Lógica Computacional

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Generalização e Instanciação Universal e Particulares

Introdução e Eliminação de Quantificadores

Métodos de Demonstração com Quantificadores

- Tendo alargado a expressividade da linguagem de primeira ordem com FBFs quantificadas, há que estudar as forma de tirar partido desta riqueza de expressão, nomeadamente para obter algumas inferências que são feitas em língua natural a partir das frases quantificadas.
- Para os dois tipos de quantificadores, o sistema de Dedução Natural, DN, estende o sistema de Dedução Natural proposicional com regras de introdução e de eliminação desses quantificadores.
- Mas antes de formalizar estas regras, há que analisar o tipo de raciocínio que é feito em língua natural, e que será adoptado e adaptado pelas regras de introdução e eliminação dos quantificadores. Como no caso proposicional
 - as **regras de introdução** (de quantificadores) correspondem a métodos de raciocínio que **criam fórmulas quantificadas**.
 - As **regras de eliminação** (de quantificadores) correspondem a métodos de raciocínio que **tiram partido de fórmulas quantificadas**.

Instanciação Universal

- A instanciação universal é um método de inferência muito simples. Basicamente corresponde a inferências do tipo:

O que é verdade para **todos** os objectos
então
é também verdade para um objecto **específico**.

Exemplo:

- Em frases aristotélicas o quantificador universal vem associado a uma implicação, e por isso este método pode ser ilustrado com um argumento muito simples que combina a instanciação com o *Modus Ponens*.

Todos os cubos são pequenos
O bloco **a** é um cubo

Logo, o bloco **a** é pequeno

- Similarmente, o método pode ainda ser combinado com o *Modus Tollens*

Todos os cubos são pequenos
O bloco **a** não é pequeno

Logo, o bloco **a** não é cubo

Generalização Existencial

- A generalização existencial é outro método de inferência muito simples, que corresponde a inferências do tipo:

O que é verdade para um objecto **específico**,
então
é também verdade para **algum** objecto

- Este é o método que em geral é utilizado para se obterem frases existenciais. Com efeito, para demonstrarmos que existe um objecto que tem uma dada propriedade basta apresentarmos um exemplo ou instância de tal objecto.

Exemplo: O número $n = 85\,498\,529$ será primo?

De facto o número n não é primo. Para o provarmos basta mostrar que:

Existem números p e q , inteiros maiores que 1, tais que $p \cdot q = n$.

- Ora a melhor forma de mostrar que existem os números p e q é dizer quais são. Como se pode facilmente verificar, esses números são: $p = 8573$ e $q = 9973$ (haverá mais?).
- **Nota:** E se fosse $n = 10\,888\,869\,450\,418\,352\,160\,768\,000\,001$?

Instanciação Existencial

- A instanciação existencial é um método de inferência muito subtil, que tem uma correspondência estreita com a utilização de pronomes em língua natural:

Se algo é valido para *algum* objecto
então
refira-se esse objecto através de um *nome*, não ambíguo
e infira-se o que pode ser inferido com esse nome

Exemplo:

(1) Existe um tetraedro à frente de todos os outros blocos
(2) Se um bloco estiver atrás de outro então é grande
(3) O bloco **b** é um cubo

Logo, o bloco **b** é grande

A validação deste argumento pode ser feita da seguinte forma. O cubo **b** (3) está atrás **daquele** tetraedro que está à frente de todos os outros blocos (1). Mas então **b** deverá ser grande (2).

Num sistema formal não existem pronomes, e assim a justificação será do tipo: Denominemos por **a** o tetraedro que está à frente de todos os outros blocos. Então o bloco **b** está atrás de **a**. Logo, **b** é grande.

Instanciação Existencial

- No caso dos pronomes, há que haver o cuidado de garantir que não há confusões entre as entidades nomeadas pelos pronomes e outras entidades que ocorram no discurso.
- Geralmente o contexto permite essa desambiguação (*anáfora*), mas quando não o faz as inferências podem ser diferentes. Por exemplo, na frase abaixo existem dois pronomes “**ele**”

“O João devolveu um livro ao Pedro. **Ele** gostou muito **dele**”

que se podem referir às três entidades referidas: o João, o Pedro e o “livro”.

- O **segundo** pronome refere-se ao livro (sem dúvida ?)
 - Ou será que o Pedro gostou do João por este lhe ter emprestado o livro?
 - Ou será que foi o João que gostou do Pedro por este lhe ter devolvido o livro?
- O **primeiro** pronome também é ambíguo, podendo referir-se ao João ou ao Pedro (ao livro não será, pois livros não são entidades que gostem do que quer que seja ...!)
 - Se se refere ao João podemos imaginar que o João terá emprestado o livro por ter gostado dele, ou que o livro seria caro, ou..
 - Se se refere ao Pedro outras hipóteses poderiam ser feitas.

Instanciação Existencial

- No exemplo dado, a desambiguação deverá ser garantida pela atribuição de um nome único ao objecto instanciado existencialmente. Caso contrário as inferências obtidas serão em geral não válidas.

Exemplo:

(1) Existe um tetraedro à frente de todos os outros blocos (2) Se um bloco estiver atrás de outro então é grande (3) O bloco b é um cubo <hr/> Logo, o bloco b é grande

- Atribuição correcta de nome:

Denominemos por **a** o tetraedro que está à frente de todos os outros blocos.
Então o bloco **b** (o cubo) está atrás de **a** (o tetraedro). Logo, o cubo **b** é grande.

- Atribuição incorrecta de nome:

Denominemos por **b** o tetraedro que está à frente de todos os outros blocos.
Então o bloco **b** (o cubo) está atrás de **b** (o tetraedro) ???

Generalização Universal

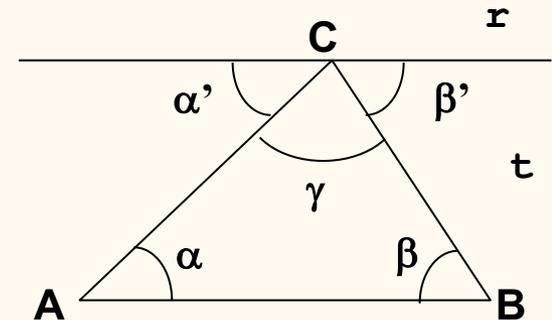
- A generalização universal é o método de inferência utilizado geralmente para justificar frases universalmente quantificadas, que corresponde a inferências do tipo:

O que é verdade para um objecto **arbitrário**,
então
é igualmente verdade para **todos** os objectos

Exemplo: A soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo é igual a 180° .

Seja **t** um triângulo **arbitrário**:

- Consideremos a recta r paralela ao lado AB do triângulo t que passa no ponto C .
- Por serem definidos por rectas paralelas, os ângulos α e β serão iguais aos ângulos α' e β' .
- Assim $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$.
- Então a soma dos ângulos internos do triângulo t é igual a 180° .



Tendo t sido escolhido arbitrariamente, então a soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo é igual a 180° .

Eliminação do \forall

- As regras formais do sistema de Dedução Natural para introdução e eliminação dos quantificadores universal e existencial implementam os métodos de inferência analisados.
- A eliminação do quantificador universal corresponde à instanciação universal. A partir de uma fórmula universalmente quantificada em \mathbf{x} , podem substituir-se todas as ocorrências da variável \mathbf{x} que ocorre livre na matriz por qualquer objecto particular, denotado por uma constante (ou função de constantes)

Eliminação do \forall

	...		
k1	$\forall \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x})$		
	...		
k2	$\varphi(\mathbf{a})$	Elim \forall : k1	
	...		

Nota:
k2 > k1

Eliminação do \forall

Exemplo:

Todos os cubos são pequenos
O bloco **a** é um cubo

Logo, o bloco **a** é pequeno

1	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$	
2	$\text{Cube}(a)$	
3	$\text{Cube}(a) \rightarrow \text{Small}(a)$	Elim \forall : 1
4	$\text{Small}(a)$	Elim \rightarrow : 2 , 3

Introdução do \exists

- A introdução do quantificador universal corresponde à generalização existencial.
- Numa fórmula que refere um dado objecto, denotado por uma constante (ou função de constantes) pode substituir-se esse objecto por uma variável (nova) quantificada existencialmente.

Introdução do \exists

	...	
k1	$\varphi(\mathbf{a})$	
	...	
k2	$\exists \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x})$	Intr \exists : k1
	...	

Nota:
k2 > k1

Introdução do \exists

Exemplo:

Todos os cubos são pequenos
O bloco **a** é um cubo

Logo, existe um bloco pequeno

1	$\forall x \text{ (Cube (x) } \rightarrow \text{ Small (x))}$	
2	Cube (a)	
3	$\text{Cube (a) } \rightarrow \text{ Small (a)}$	Elim \forall : 1
4	Small (a)	Elim \rightarrow : 2 , 3
5	$\exists x \text{ Small (x)}$	Intr \exists : 4

Introdução do \exists

- Naturalmente há que ter o cuidado de garantir que objectos diferentes sejam generalizados para variáveis diferentes.
- Caso contrário as fórmulas obtidas não correspondem a inferências válidas!

Exemplo:

Os objectos **a** e **b** têm formas diferentes
Logo, existe um objecto com forma diferente de si próprio (!?)

1	$\neg \text{SameShape}(a, b)$	
<hr/>		
2	$\exists y \neg \text{SameShape}(a, y)$	Intr \exists : 1
3	$\exists y \exists y \neg \text{SameShape}(y, y)$	Intr \exists : 1
4	$\exists y \neg \text{SameShape}(y, y)$	Quantificação nula

1	$\neg \text{SameShape}(a, b)$	
<hr/>		
2	$\exists y \neg \text{SameShape}(a, y)$	Intr \exists : 1
3	$\exists x \exists y \neg \text{SameShape}(x, y)$	Intr \exists : 1

Eliminação do \exists

- A eliminação do quantificador existencial corresponde à instanciação particular.
- Existindo uma fórmula que quantifica existencialmente uma variável x , e se se puder nomeando essa variável com uma constante **nova** inferir uma fórmula em que esta constante **não ocorra**, então esta fórmula pode ser inferida da fórmula inicial quantificada.

Eliminação do \exists

k1	$\exists x \varphi(x)$ \dots					
m1	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">a</td> <td style="padding-left: 5px;">$\varphi(a)$</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;">\dots</td> </tr> </table>	a	$\varphi(a)$	\dots		
a	$\varphi(a)$					
\dots						
m2	ψ	a não ocorre em ψ				
k2	ψ	Elim \exists: k1, m1 - m2				

Nota:

$$m1 > k1$$

$$k2 > m2$$

Eliminação do \exists

Exemplo:

Qualquer bloco à frente de outro é grande
O tetraedro **a** está à frente de um cubo

Logo, o bloco **a** é grande

1	$\forall x \forall y (\text{FrontOf}(x, y) \rightarrow \text{Large}(x))$	
2	$\text{Tet}(a) \wedge \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{FrontOf}(a, x))$	
3	$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{FrontOf}(a, x))$	Elim \wedge : 2
4	$\boxed{b} \text{Cube}(b) \wedge \text{FrontOf}(a, b)$	
5	$\forall y \text{FrontOf}(a, y) \rightarrow \text{Large}(a)$	Elim \forall : 1
6	$\text{FrontOf}(a, b) \rightarrow \text{Large}(a)$	Elim \forall : 5
7	$\text{FrontOf}(a, b)$	Elim \wedge : 4
8	$\text{Large}(a)$	Elim \rightarrow : 6, 7
9	$\text{Large}(a)$	Elim \exists : 3, 4 - 8

Eliminação do \exists

- É importante notar que a variável que se nomeia de novo tenha um nome **novo**, que não ocorra na fórmula quantificada.
- Caso contrário as fórmulas obtidas não correspondem a inferências válidas!

Exemplo:

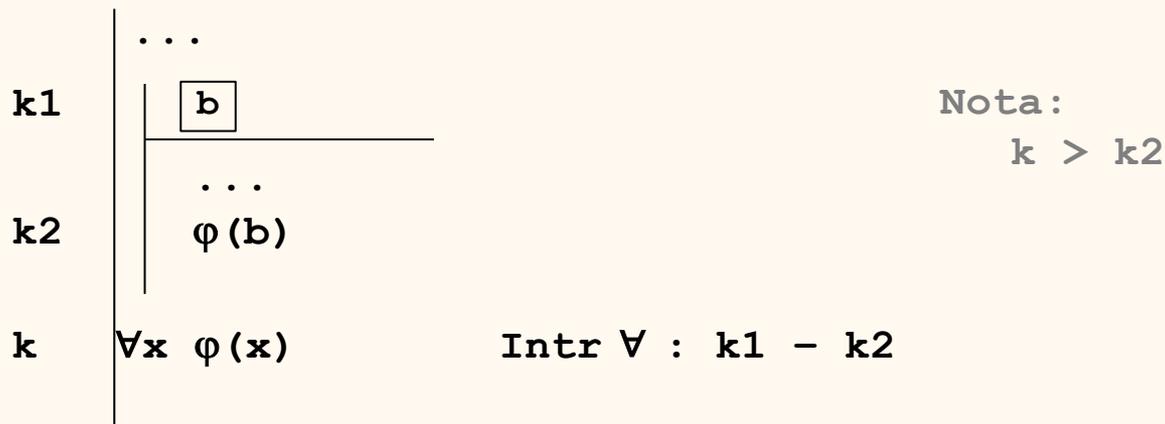
O tetraedro **a** está à frente de um cubo
Logo, existe um bloco à frente de si próprio (???)

1	$\text{Tet}(a) \wedge \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{FrontOf}(a, x))$	
2	$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{FrontOf}(a, x))$	Elim \wedge : 2
3	$\boxed{a} \text{Cube}(a) \wedge \text{FrontOf}(a, a)$	
4	$\text{FrontOf}(a, a)$	Elim \wedge : 4
5	$\exists x \text{FrontOf}(x, x)$	Intr \exists : 4
6	$\exists x \text{FrontOf}(x, x)$	Elim \exists : 2, 3 - 5

Introdução do \forall

- A introdução do quantificador universal corresponde à generalização universal.
- Arbitre-se a existência de um nome que possa ser atribuído não ambíguamente a um objecto. Como esse nome é arbitrário, toda a fórmula que possa ser inferida para um objecto com esse nome pode ser inferida para qualquer objecto.

Introdução do \forall



Introdução do \forall

Exemplo:

Todos os objectos à frente do bloco **a** são grandes
Todos os cubos estão à frente de **a**
Logo, todos os cubos são grandes

1	$\forall x$ (FrontOf (x, a) \rightarrow Large (x))		
2	$\forall x$ (Cube (x) \rightarrow FrontOf (x, a))		
3	<table border="1"><tr><td>b</td></tr></table>	b	
b			
4	Cube (b)		
5	Cube (b) \rightarrow FrontOf (b, a)	Elim \forall : 2	
6	FrontOf (b, a)	Elim \rightarrow : 4, 5	
7	FrontOf (b, a) \rightarrow Large (b)	Elim \forall : 1	
8	Large (b)	Elim \rightarrow : 6, 7	
9	Cube (b) \rightarrow Large (b)	Intr \rightarrow : 4 - 8	
10	$\forall x$ (Cube (x) \rightarrow Large (x))	Intr \forall : 3 - 9	

Introdução do \forall

- Geralmente a atribuição do nome é seguida imediatamente da atribuição do tipo de objecto a que se pretende atribuir o nome.
- Neste caso, os dois passos podem ser feitos simultaneamente, notando que a fórmula final quantificada é necessariamente condicional. Para flexibilizar o sistema continuaremos a justificar esse passo através de uma introdução do \forall .

Exemplo:

1	$\forall x \text{ (FrontOf}(x, a) \rightarrow \text{Large}(x) \text{)}$			
2	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \text{FrontOf}(x, a) \text{)}$			
3	<table border="1"><tr><td>b</td><td>Cube(b)</td></tr></table>	b	Cube(b)	
b	Cube(b)			
4	Cube(b) \rightarrow FrontOf(b, a)	Elim \forall : 2		
5	FrontOf(b, a)	Elim \rightarrow : 3, 4		
6	FrontOf(b, a) \rightarrow Large(b)	Elim \forall : 1		
7	Large(b)	Elim \rightarrow : 5, 6		
8	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \text{Large}(x) \text{)}$	Intr \forall : 3 - 7		

Introdução do \forall

- Note-se a importância do nome **não se confundir com outros nomes** no contexto em que é utilizado. Caso contrário as inferências podem ser inválidas

Exemplo:

Todos os cubos são maiores que todos os tetraedros
Existem tetraedros médios

Logo, todos os cubos são maiores do que si próprios (???)

1	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{Larger}(x,y)))$	
2	$\exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Medium}(x))$	
3	$\boxed{a} \text{Tet}(a) \wedge \text{Medium}(a)$	
4	$\boxed{a} \text{Cube}(a)$	
5	$\text{Cube}(a) \rightarrow \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{Larger}(a,y))$	Elim \forall : 1
6	$\forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{Larger}(a,y))$	Elim \rightarrow : 4, 5
7	$\text{Tet}(a) \rightarrow \text{Larger}(a,a)$	Elim \forall : 6
8	$\text{Tet}(a)$	Elim \wedge : 3
9	$\text{Larger}(a,a)$	Elim \rightarrow : 7, 8
10	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Larger}(x,x))$	Intr \forall : 4 - 9
11	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Larger}(x,x))$	Elim \exists : 2, 3 - 10