Lógica Computacional

Frases Quantificadas

Quantificadores e Variáveis

Fórmulas Bem Formadas: Sintaxe e Semântica

Formas Aristotélicas

Frases Quantificadas

- Existem várias formas utilizadas em linguagem natural para **predicar** (i.e. atribuir propriedades a) **conjuntos** de objetos tais como:

  Todas as bolas são leves

  Algumas bolas são leves

  Quase todas as bolas são leves

  Umas poucas bolas são leves

  Quatro bolas são leves

  Nenhuma bola é leve

- Estas frases que descrevem conhecimento sobre "quantidades" de objetos pertencentes a esses conjuntos são conhecidas como frases **quantificadas**.

- Obviamente, a validade de argumentos usando frases quantificadas depende do seu tipo, como se pode verificar facilmente

Todas as bolas são leves	Quase todas as bolas são leves
Isto é uma bola	Isto é uma bola
Logo, esta bola é leve (!)	Logo, esta bola é leve (?)

Fórmulas Quantificadas

- Para representar (algumas de) estas frases quantificadas, temos de estender as fórmulas permitidas na linguagem de primeira ordem.

- Como vimos fórmulas atómicas permitem atribuir propriedades ou relações a objetos bem determinados:
  - **Ball(b)** representa a propriedade “ser bola” do objecto b,
  - **Neighbours(a,b)** representa uma relação de “vizinhança” entre os objetos a e b.

- Em lógica de predicados essas propriedades podem ser atribuídas a objetos genéricos ou indeterminados, através do uso de variáveis (denotadas por letras do final do alfabeto, x, y, z, ...):
  - **Ball(x)** atribui a propriedade “ser bola” a um objecto x indeterminado,
  - **Neighbours(x,y)** atribui uma “vizinhança” entre objetos indeterminados x e y.

- De notar que, sendo indeterminados os objetos denotados por variáveis, os predicados com variáveis não representam proposições (frases) completas, mas sim “componentes” a completar através da especificação dos objetos referidos.

Fórmulas Quantificadas

- Mais especificamente, se a fórmula **Ball(b)** se pode traduzir pela frase: "O objeto b é uma bola", a fórmula **Ball(x)** não pode ser traduzida numa frase completa de língua natural pois o objeto x não está determinado, sendo necessária a sua **quantificação**.

- A quantificação em lógica de predicados de 1ª ordem é feita através de dois quantificadores:

- O **quantificador universal** (∀) permite especificar que o objeto indeterminado representa todo e qualquer objeto dum universo do discurso.

  ∀x (Ball(x)) – Todos os objetos (do universo considerado) são bolas

- O **quantificador existencial** (∃) especifica que o objeto indeterminado representa algum (pelo menos um) dos objetos do universo do discurso, sem o(s) identificar.

  ∃x (Ball(x)) – Existe (pelo menos) um objeto (no universo considerado) que é uma bola

- De notar que à partida se assume à partida um determinado universo, isto é os objetos que podem ser referidos pelas variáveis é restrito a esse conjunto (finito ou infinito): o "domínio do discurso".

Fórmulas Bem Formadas

- Antes de analisar exemplos de frases quantificadas vamos definir rigorosamente a sintaxe e a semântica da linguagem que vamos utilizar, nomeadamente das fórmulas quantificadas.

- Dada uma assinatura Σ **= < SP, SF>** em que **SP** denota o conjunto dos símbolos de predicados e **SF** o conjunto de símbolos funcionais (incluindo constantes), e um conjunto de variáveis **X = {x,y,z,...}.**
  - $\mathbf{SP = SP_0} \cup \mathbf{SP_1} \cup \mathbf{SP_2}$ … em que $\mathbf{SP_n}$ é o conjunto de símbolos predicativos ("predicados") n-ários (assume-se que $\perp \in \mathbf{SP_0}$ e que $= \in \mathbf{SP_2}$).
  - $\mathbf{SF = SF_0} \cup \mathbf{SF_i} \cup \mathbf{SF_2}$ … em que $\mathbf{SF_k}$ é o conjunto de símbolos funcionais ("funções") n-ários, sendo os elementos de $\mathbf{SF_0}$ geralmente referidos como nomes ou constantes.

1. Objetos da Assinatura Σ

O conjunto de objetos que podem ser denotados com uma assinatura Σ é definido indutivamente como *o menor conjunto* que inclui:

1. Variáveis e constantes de Σ (i.e. elementos de $\mathbf{SF_0}$).
2. Funções de $\mathbf{SF_k}$ (i > 1) em que os seus **k** argumentos denotam objetos de Σ.

Fórmulas Bem Formadas

- Podemos agora estender a definição indutiva de fórmulas bem formadas (FBFs) feita para a lógica proposicional para a assinatura Σ **= < SP, SF>** e variáveis **X = {x,y,z,...}.**

Fórmulas bem Formadas (FBFs)

- As fórmulas bem formadas que se podem obter da assinatura Σ são definidas indutivamente como o *menor conjunto* que inclua:

1. **Fórmulas Atómicas**: constituídas por símbolos de $\mathbf{SP_k}$ cujos **k** argumentos sejam objetos de Σ.

2. **Fórmulas Booleanas:** Se φ e ψ forem FBFs são igualmente FBFs as fórmulas

$$\neg(\varphi) \quad , \quad (\varphi) \wedge (\psi) \quad , \quad (\varphi) \vee (\psi) \quad , \quad (\varphi) \rightarrow (\psi) \quad \text{e} \quad (\varphi) \leftrightarrow (\psi)$$

3. **Fórmulas Quantificadas:** Se ν for uma variável e φ uma FBF, são FBFs

$$\forall \nu\ (\varphi) \qquad \text{e} \qquad \exists \nu\ (\varphi)$$

Nota: Sempre que bem definidas as regras de precedência, alguns parênteses podem eliminar-se.

Apesar de "bem-formadas", nem todas as FBFs correspondem a frases de língua natural nomeadamente quando incluem variáveis **livres**.

Fórmulas Bem Formadas e Variáveis Livres

- A situação das variáveis livres pode ser analisada através de alguns exemplos. Uma FBF atómica sem variáveis corresponde a uma frase na língua natural: Por exemplo,
  - **Ball(b)**, corresponde à frase “o objeto b é uma bola”.
- Uma FBF contendo variáveis não quantificadas, não corresponde a uma frase completa de língua natural e *por si só não tem significado*. A FBF só adquire significado e corresponde a uma frase de língua natural quando a variável é quantificada.
  - **Ball(x)** , não corresponde a qualquer frase e não tem significado.
  - ∀**x (Ball(x))** , corresponde à frase “Todos os objetos são bolas”.
  - ∃**x (Ball(x))** , corresponde à frase “Alguns objetos são bolas”.
- Uma variável não quantificada diz-se **livre**. Quando é quantificada a variável diz-se **ligada**. Numa fórmula podem coexistir variáveis livres e ligadas.
- ∀**x (Neighbours(x,y))** , não corresponde a qualquer frase, pois a variável y está livre.
- ∀**x (Neighbours(x,b))** , corresponde à frase “Todos os objetos são vizinhos de b”.
- ∀**x** ∃**y (Neighbours(x,y))** , corresponde à frase “Todos os objetos são vizinhos de algum objeto”.

Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- Em geral denotaremos por **φ(x)** uma FBF em que a variável **x** ocorra livre. Nestas condições as fórmulas ∀**x (φ(x))** e ∃**x (φ(x)) ligam** a variável x ao respetivo quantificador e emprestam significado à fórmula.

- Uma FBF diz-se **fechada** se todas as suas variáveis estão ligadas. Caso contrário diz-se **aberta**.

- Generalizando o caso proposicional, pretendemos atribuir o valor de Verdade ou Falso a uma FBF fechada, já que as fórmulas abertas não correspondem a frases completas de língua natural e não podem ser avaliadas como verdadeiras ou falsas.

- No entanto, no caso da lógica de predicados deparamo-nos com um problema que não existia na lógica proposicional. Nesta poderíamos obter o valor de verdade de uma FBF a partir do valor de verdade das suas componentes e assim bastava definir uma valoração das suas fórmulas atómicas (por exemplo $P \vee Q$ seria verdade se P ou Q o fossem).

- No caso da lógica de predicados as componentes podem não ter significado, como por exemplo na fórmula ∀**x (Ball(x))** em que nem a componente de quantificação ∀**x**, nem a fórmula aberta **Ball(x)**, têm significado**!**

Semântica de Fórmulas Bem Formadas

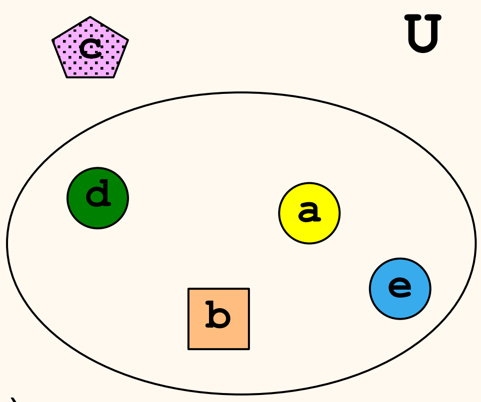
- Assim sendo o significado de fórmulas quantificadas vai ser obtido a partir da noção de **satisfação** para objetos pertencentes a um domínio de discurso

- Uma fórmula aberta, é **satisfeita** por determinados objetos do domínio de discurso, se é verdadeira quando as suas variáveis são substituídas por esses objetos.

- Uma fórmula ∀**x (φ(x))** é **verdadeira** se a fórmula aberta **φ(x)** é satisfeita para ***todos*** os objetos *do domínio de discurso*.

- Uma fórmula ∃**x (φ(x))** é **verdadeira** se a fórmula aberta **φ(x)** é satisfeita para ***alguns*** (pelo menos um) objetos do *domínio de discurso*.

Exemplos



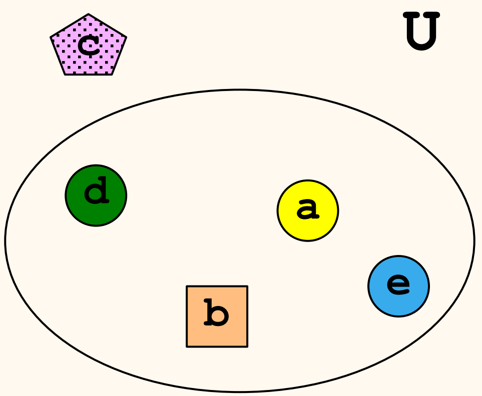
No universo **U**, ao lado temos:

- ∀x **Ball(x)= F** (**Ball (x)** não é satisfeita para x = b)
- ∃x **Cube(x)= V** (**Cube(x)** é satisfeita para x = b)
- ∃x **Dodec(x)= F (c** não pertence ao domínio de discurso)

Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- A significado de fórmulas compostas por fórmulas fechadas segue as mesmas regras do caso proposicional (e.g. a conjunção de fórmulas é verdadeira se ambas o forem).

- É necessário no entanto ter cuidado com o **alcance** (**escopo**) dos quantificadores. Por exemplo, no universo U, a fórmula



$$\exists x\ (\mathtt{Cube}(x) \wedge \mathtt{Green}(x))$$

é **falsa** pois não existe nenhum objeto que torne verdadeira a fórmula **Cube(x) ∧ Green(x)**, i.e. nenhum objeto, é um cubo verde.

- No entanto tal não é o caso da fórmula

$$\exists x\ \mathtt{Cube}(x) \wedge \exists x\ \mathtt{Green}(x)$$

em que existem dois quantificadores, referindo variáveis que têm o mesmo nome mas em contextos (escopos) diferentes:

$\exists x\ \mathtt{Cube}(x)$; e

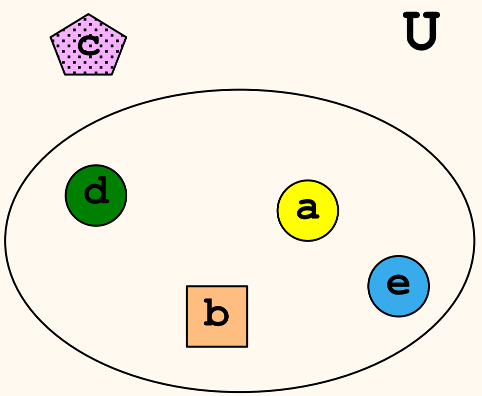
$\exists x\ \mathtt{Green}(x)$

Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- A importância dos escopo dos quantificadores pode ser analisada com mais detalhe.

- Com efeito, no universo U, a fórmula

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{Cube(x)} \land \exists \mathbf{x}\ \mathbf{Green(x)}$$



é **verdadeira** pois

- existe um objeto, **b**, que torna verdadeira a fórmula **∃x Cube(x);**
- e existe um **outro** objeto, **d,** que torna verdadeira a fórmula **∃x Green(x).**

- O facto de ambos os objetos serem referidos pela variável x não indica que a variável x represente o mesmo objecto pois as diferentes ocorrências da variável são ligadas a quantificadores diferentes.

- Em geral esta “ambiguidade” deve ser evitada usando-se variáveis “diferentes”

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{Cube(x)} \land \exists \mathbf{y}\ \mathbf{Ball(y)}$$

mas esta fórmula tem exatamente o mesmo significado da fórmula acima!

Frases Aristotélicas

- Muitas frases envolvendo um só quantificador são traduzidas numa de quatro formas estudadas inicialmente por Aristóteles:

Frases	Afirmativas (A)	Negativas (N)
Universais (U)	Todas as bolas são leves	Nenhuma bola é leve
Particulares (P)	Algumas bolas são leves	Algumas bolas não são leves

- Estas formas estão relacionadas entre si (através da "negação cruzada"):

- A negação de uma afirmação particular é uma negação universal:
  - **AP:** Algumas bolas são leves.
  - **¬AP:** É falso que algumas bolas sejam leves.
  - **NU:** Nenhuma bola é leve.

- A negação de uma afirmação universal é uma negação particular:
  - **AU:** Todas as bolas são leves.
  - **¬AU:** É falso que todas as bolas sejam leves.
  - **NP:** Algumas bolas não são leves.

Frases Aristotélicas

- Estas frases podem ser facilmente traduzidas para fórmulas de 1ª ordem, sendo conveniente refraseá-las para a tradução ser direta:

- **Afirmações Universais:** Todas as bolas são **leves**
  - Qualquer que seja o objeto, se for uma bola então ele é leve.
  - **AU:** $\forall x\ (\mathbf{Ball}(x) \rightarrow \mathbf{Light}(x))$

- **Negações Universais :** Nenhuma bola é leve
  - Qualquer que seja o objeto, se for uma bola então ele não é leve.
  - **NU:** $\forall x\ (\mathbf{Ball}(x) \rightarrow \neg\mathbf{Light}(x))$

- **Afirmações Particulares:** Algumas bolas são leves
  - Existem objetos que são bolas e são leves.
  - **AP:** $\exists x\ (\mathbf{Ball}(x) \wedge \mathbf{Light}(x))$

- **Negações Particulares:** Algumas bolas não são leves
  - Existem objetos que são bolas e não são leves.
  - **NP:** $\exists x\ (\mathbf{Ball}(x) \wedge \neg\ \mathbf{Light}(x))$

Frases com um só Quantificador

- O método de refrasear as frases deve ser utilizado sempre que as frases sejam mais complexas e/ou apareçam de uma forma mais estilizada. Alguns exemplos ilustram este método:

• Algumas bolas pretas são leves.

  Existem objetos **que** são bolas **e** são pretos **e** são leves

  $\exists x\ (\mathbf{Ball}(x) \land \mathbf{Black}(x) \land \mathbf{Light}(x))$

• Algumas bolas que não são brancas são leves

  Existem objetos **que** são bolas **e** não são brancos **e** são leves

  $\exists x\ (\mathbf{Ball}(x) \land \neg\mathbf{White}(x) \land \mathbf{Light}(x)$

• Todas as bolas são brancas ou pretas

  Qualquer que seja o objeto, **se** for uma bola, **então** é branco **ou** preto.

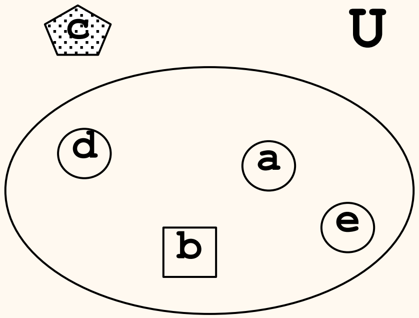
  $\forall x\ (\mathbf{Ball}(x) \rightarrow (\mathbf{Black}(x) \lor \mathbf{White}(x)))$

- Todas as bolas são leves a menos que sejam pretas.

  Qualquer que seja o objeto, **se** for uma bola e *não for preto*, **então** é leve

  $\forall x\ ((\mathbf{Ball}(x) \land \neg\mathbf{Black}(x)) \rightarrow \mathbf{Light}(x))$

Frases com um só Quantificador



- Algumas frases têm um significado que pode ser **contraintuitivo**. Por exemplo, assumindo o domínio de discurso **U**, como interpretar a frase:

Todos os dodecaedros têm dez faces.

- Intuitivamente a frase é *falsa* (os dodecaedros têm 12 faces).

- No entanto, a fórmula "aberta" é satisfeita para todos os objetos do domínio. Por exemplo, aplicada ao objecto **a**, a fórmula é verdadeira porque o objeto **a** não é um dodecaedro!

$$\texttt{Dodec(a)} \rightarrow \texttt{TenFaces(a)}$$

- Portanto, no domínio de discurso **U**, a frase é *verdadeira* !

- Mas existindo dodecaedros (se **c** pertencesse a **U**) a frase seria falsa!

- Desta forma, frases deste tipo são uma forma *estilizada* de afirmar *negações* (no caso, **não** existem dodecaedros no domínio de discurso) usadas vulgarmente em linguagem natural. Por exemplo a frase

"Se o cavalo tivesse asas ele voava"

pode ser interpretada como afirmando que o cavalo não tem asas (ele não voa...).

Frases com um só Quantificador

- De notar ainda algumas formas de implicatura, que podem ser sugeridas por algumas frases. Por exemplo a frase:

  (1) Algumas bolas são brancas $\exists x\ (Ball(x) \land White(x))$

  pode sugerir a frase subentendida

  (2) (... e) algumas bolas não são brancas $\exists x\ (Ball(x) \land \neg White(x))$

  oposta à frase

  (3) Todas as bolas são brancas $\forall x\ (Ball(x) \to White(x))$

- No entanto a frase que nega (3) é a frase (2) e ela não foi explicitada. Assim sendo as frases (2) e ¬(3) são "equivalentes" (têm o mesmo significado)

$$\exists x\ (Ball(x) \land \neg White(x))$$
$$\neg(\forall x\ (Ball(x) \to White(x)))$$

- Mas as frases (1) e ¬(3) já não o são (aliás nem (1) e (3) são equivalentes)

$$\exists x\ (Ball(x) \land White(x))$$
$$\neg(\forall x\ (Ball(x) \to White(x)))$$

(pensemos num universo apenas com bolas brancas ...)