

Lógica Computacional

Demonstrações Formais

Dedução Natural

Introdução e Eliminação da Conjunção

Introdução e Eliminação da Disjunção

Demonstrações Formais

- A análise do raciocínio feito durante as demonstrações feitas anteriormente e envolvendo conjunções e disjunções podem ser agora formalizados em regras de inferência usadas no sistema formal de Dedução Natural.
- Como explicado anteriormente uma demonstração é uma sequência Γ de fórmulas,
 - iniciada por um conjunto de fórmulas Φ que não necessitam de justificação (as premissas);
 - continuada por fórmulas justificadas por regras de inferência do sistema, aplicadas a fórmulas anteriores na sequência;
 - Sendo a última fórmula, φ , a que se pretende demonstrar.
- Vários sistemas de dedução (ou de demonstração) têm sido propostos e estudados, que se distinguem entre si pela linguagem em que se podem escrever as fórmulas de Γ e pelas regras de inferência utilizadas.
- Vamos estar naturalmente interessados na linguagem das fórmulas de 1ª ordem (FPOs) já definidas a partir de fórmulas atômicas e dos operadores Booleanos de conjunção (\wedge), disjunção (\vee) e negação (\neg).

Demonstrações e Sistemas de Dedução

- Em geral, estaremos interessados em saber se a partir de um conjunto de premissas Φ é possível demonstrar uma fórmula φ no sistema de dedução X , usando as regras de inferência desse sistema X , o que denotaremos por

$$\Phi \vdash_X \varphi$$

- Obviamente, para um sistema ser útil as suas regras de inferência deverão ser de alguma forma adequadas.
- Em particular, estaremos interessados em utilizar sistemas de dedução que sejam **coerentes e completos**, ou seja em que se possam estabelecer as seguinte relações entre formulas demonstráveis no sistema X e conclusões válidas:

- Coerência: $\Phi \vdash_X \varphi \implies \Phi \models \varphi$

- Completude: $\Phi \models \varphi \implies \Phi \vdash_X \varphi$

- Este é o caso do sistema de **Dedução Natural** em que, como o nome indica, as regras de inferência tentam captar as formas de raciocínio usadas “no dia a dia”.

Introdução e Eliminação da Conjunção

- Neste sistema, e como vimos nos exemplos anteriores de argumentação em língua natural, o raciocínio pode ser formalizado através de regras de **Introdução** e de **Eliminação** dos operadores Booleanos (tal como já tinha sido feito com o predicado de igualdade).
- No sistema de **Dedução Natural**, as regras de introdução e eliminação da conjunção são as seguintes

Introdução da \wedge

	...	
k1	ϕ	
	...	
k2	ϕ	
	...	
k	$\phi \wedge \phi$	Intr \wedge: k1, k2

Nota:

$k > k1$

$k > k2$

Eliminação da \wedge

	...	
k	$\phi \wedge \phi$	
	...	
k1	ϕ	Elim \wedge: k
	...	
k2	ϕ	Elim \wedge: k

Nota:

$k1 > k$

$k2 > k$

Introdução e Eliminação da Conjunção

Estas regras permitem naturalmente formalizar os raciocínios feitos anteriormente.

Exemplo:

1	A Maria é alta
2	O João é baixo
<hr/>	
3	A Maria é alta e o João é baixo

1	Alta(maria)
2	Baixo(joão)
<hr/>	
3	Alta(maria) \wedge Baixo(joão) Intr \wedge : 1,2

Introdução da Disjunção

- A regra de introdução da disjunção é definida da seguinte forma.

Introdução da \vee

k		...	
		ϕ	
		...	
k1		$\phi \vee \phi$	Intr \vee: k
		...	
k2		$\phi \vee \phi$	Intr \vee: k

Nota:

$k1 > k$

$k2 > k$

Introdução da Disjunção

- Como vimos anteriormente, ao invés da conjunção, a introdução da disjunção permite concluir uma fórmula mais “fraca” do que a fórmula de partida, como se pode notar no exemplo seguinte.

Exemplo:

1	A Maria é alta	
<hr/>		
2	A Maria é alta ou o João é baixo	
1	Alta (maria)	
<hr/>		
2	Alta (maria) \vee Baixo (joão)	Intr \vee : 1
1	Alta (maria)	
<hr/>		
2	Baixo (joão) \vee Alta (maria)	Intr \vee : 1

Eliminação da Disjunção

- A eliminação da disjunção é a regra do sistema de dedução natural que capta o raciocínio por casos. É definida como se segue.

Eliminação da \vee

k1	$\varphi \vee \psi$	
m1	φ	Nota:
	...	
m2	ρ	$m2 > m1$
n1	ψ	$n1 > k1$
	...	$n2 > n1$
n2	ρ	$k2 > m2$
k2	ρ	$k2 > n2$

Elim \vee : k1, m1-m2, n1-n2

Distribuição da \wedge em Relação à \vee

- A partir destas regras poderemos verificar que certas regras de equivalência são demonstráveis no sistema DN. Em particular poderemos demonstrar as regras da distribuição envolvendo disjunções e conjunções

$$A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	Elim \wedge : 1
3	$B \vee C$	Elim \wedge : 1
4	B	
5	$A \wedge B$	Intr \wedge : 2,4
6	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Intr \vee : 5
7	C	
8	$A \wedge C$	Intr \wedge : 2,7
9	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Intr \vee : 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Elim \vee : 3,4-6,7-9

Distribuição da \wedge em Relação à \vee

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \models A \wedge (B \vee C)$$

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$A \wedge B$	
3	A	Elim \wedge : 2
4	B	Elim \wedge : 2
5	$B \vee C$	Intr \vee : 4
6	$A \wedge (B \vee C)$	Intr \wedge : 3,5
7	$A \wedge C$	
8	A	Elim \wedge : 7
9	C	Elim \wedge : 7
10	$B \vee C$	Intr \vee : 9
11	$A \wedge (B \vee C)$	Intr \wedge : 8,10
12	$A \wedge (B \vee C)$	Elim \vee : 1,2-6,7-11

Distribuição da \vee em Relação à \wedge

$$A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

1	$A \vee (B \wedge C)$	
2	A	
3	$A \vee B$	Intr \vee : 2
4	$A \vee C$	Intr \vee : 2
5	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Intr \wedge : 3,4
6	$B \wedge C$	
7	B	Elim \wedge : 6
8	$A \vee B$	Intr \vee : 7
9	C	Elim \wedge : 6
10	$A \vee C$	Intr \vee : 9
11	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Intr \wedge : 8,10
12	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Elim \vee : 1,2-5,6-11

Distribuição da \vee em Relação à \wedge

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \models A \vee (B \wedge C)$$

1	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
2	$A \vee B$	Elim \wedge : 1
3	A	
4	$A \vee (B \wedge C)$	Intr \vee : 3
5	B	
6	$A \vee C$	Elim \wedge : 1
7	A	
8	$A \vee (B \wedge C)$	Intr \vee : 7
9	C	
10	$B \wedge C$	Intr \wedge : 5,9
11	$A \vee (B \wedge C)$	Intr \vee : 10
12	$A \vee (B \wedge C)$	Elim \vee : 6,7-8,9-11
13	$A \vee (B \wedge C)$	Elim \vee : 2,3-4,5-12

Visibilidade em Sub-Demonstrações

- Na aplicação das regras indicadas há que ter bastante cuidado com a visibilidade de fórmulas dentro das sub-demonstrações.
- Caso contrário podem cometer-se alguns erros óbvios como se pode ver no seguinte exemplo:

$$\{ B, A \vee B \} \models A \wedge B \quad ???$$

1	B	
2	A \vee B	
3	A	
4	A \wedge B	Intr \wedge : 1,3
5	B	
6	A \wedge B	Intr \wedge : 3 ,5
7	A \wedge B	Elim \vee : 2,3-4,5-6

Importante: Dentro de uma sub-demonstração só se vêem as fórmulas das sub-demonstrações que a contêm.